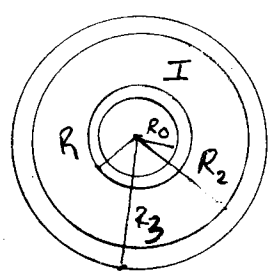


# Princípio básico de funcionamento do gerador eletrostático van de Graaff.

Considere duas cascas esféricas condutoras



(\*) Isto é uma consequência do fato das cascas serem condutoras (em equilíbrio) e da lei de Gauss.

1. Casca interna carregada com carga  $q_1$ , e a casca externa descarregada.

A carga  $q_1$  estará distribuída sobre a superfície de raio  $R_1$  (superfície externa da casca interna)

O campo entre as cascas (região I) é dado por

$$E_I = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad R_1 < r < R_2$$

No equilíbrio eletrostático o campo no interior da casca externa ( $R_2 < r < R_3$ ) deve ser nulo

$\Rightarrow$  Haverá uma redistribuição das cargas na casca externa de modo que na superfície de raio  $R_2$  aparecerá uma carga  $-q_1$ . Por consequência, na superfície de raio  $R_3$  aparecerá uma carga  $+q_1$ .

Isto decorre do uso da lei de Gauss para superfícies

②

Gaussiana de raio  $R_2 < \rho < R_3$  :  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 = \frac{Q}{\epsilon_0}$

onde  $Q$  é a carga contida no volume delimitado pela sup. Gaussiana.  $Q = q_1 + q' \Rightarrow q' = -q_1$ .

Por conservação de carga e levando em conta que originalmente a carga externa estava neutra,  
 $\Rightarrow$  Se aparece uma carga  $-q_1$  na sup. de raio  $R_2$ ,  
 vai aparecer uma carga  $+q_1$  na sup. de raio  $R_3$ .

A d.d.p. entre  $R_1$  e  $R_2$  é dada por

$$\begin{aligned} V_1 - V_2 &= \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r} \right) \Big|_{R_1}^{R_2} \\ &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \end{aligned}$$

Como  $R_1 < R_2 \Rightarrow \frac{1}{R_1} > \frac{1}{R_2}$ . Supondo  $q_1 > 0$  temos

que  $V_1 > V_2$ . Se conectarmos as superfícies de raio

$R_1$  e  $R_2$  por um fio condutor, a carga em  $R_1$

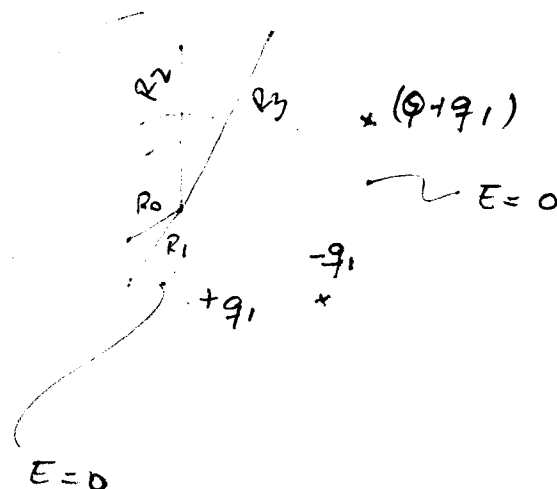
fluirá para  $R_2$ . O excesso de carga na casca

externa terminará na sup. externa de raio  $R_3$ .  
 no equilíbrio eletrostático

Isto pq o campo elétrico na região  $R_2 < \rho < R_3$  deve ser nulo no equilíbrio eletrostático.

(3)

2. Suponha agora que a casca externa já tenha um excesso de carga  $Q$  e que a casca interna tenha um excesso de carga  $q_1$ . Nesse caso, a distribuição de carga, no equilíbrio eletrostático será:



$+q_1$  na sup. de raio  $R_1$   
 $-q_1$  na sup. de raio  $R_2$

$Q+q$  na sup. de raio  $R_2$

A d.d.p.  $V_1 - V_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$

(Basta repetir o mesmo raciocínio anterior)

Seu do assim, não importa se a casca externa já tenha um excesso de carga. Nesse situação, se conectarmos as superfícies de raios  $R_1$  e  $R_2$  com um fio condutor, fluirá carga de  $R_1 \rightarrow R_2$  e o excesso de carga terminará (no equilíbrio eletrostático) na sup. mais externa de raio  $R_2$ .

Repete todo esse raciocínio supondo que a carga  $q_1 < 0$ .

O resultado final é o mesmo!

(4)

Visitem a Casa de Descobertas (situada no andar 2º)  
para ver, inspecionar, brincar e ouvir as explicações  
sobre o funcionamento do acelerador van de Graaff.

## Capacitância e capacitores

### Capacitor de placas planas e paralelas

$$d \begin{array}{c} \downarrow E = \sigma / \epsilon_0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} +Q = \sigma A \\ -Q = -\sigma A \end{array}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \Delta V = V_+ - V_- = E d = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = \frac{\sigma A}{\epsilon_0 A} d \quad Q$$

$V$

$$V = \frac{Q d}{\epsilon_0 A} \Rightarrow V \propto Q$$

Definimos capacitância  $C = \frac{Q}{V}$

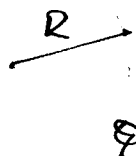
No caso  $C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$  Note que a capacitância

não depende nem de  $V$  nem de  $Q$ , apenas de  
fatores geométricos e, veremos mais adiante da  
permissividade elétrica ( $\epsilon$ ) do dielétrico existente  
entre as "placas" do capacitor.

Unidade  $1 \text{ Farad} = \frac{1 \text{ Coulomb}}{\text{Volt}}$

5

Capacitância de uma esfera condutora.



Potencial na sup. de esfera  $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$

$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R \quad C \propto R$

aumenta com o raio da esfera.

$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 8.99 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2 \Rightarrow C \approx \frac{R}{9 \times 10^9} \left( \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} \right)$

Para que  $C = 1 \text{ F} \Rightarrow R \approx 9 \times 10^9 \text{ m} = 9 \times 10^6 \text{ km}$

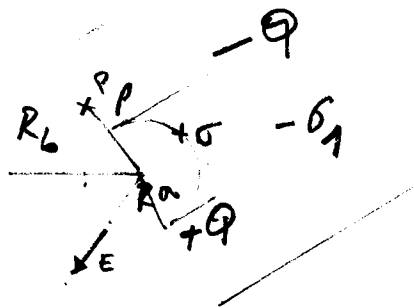
Raio da Terra  $\approx 6 \times 10^3 \text{ km} !$

Para que a capacitância de um capacitor de placas planas e paralelas, separadas por uma distância  $d \approx 1 \times 10^{-3} \text{ m}$  (1mm) seja 1F, a área das placas teria que ser de  $100 \text{ km}^2$  a área de Niterói!  
 $\approx 140 \text{ km}^2$

Os capacitores usuais são medidos em  $\mu\text{F}$  ou  $\text{pF}$ .  
 $10^{-6} \text{ F} \quad 10^{-12} \text{ F}$

## Capacitores cilíndricos

6



Dois cilindros coaxiais  
de raios  $R_a$  e  $R_b$

Campo elétrico no ponto  
 $R_a < \rho < R_b$

Densidades superficiais de carga  $+\sigma$  e  $-\sigma$   
respectivamente. Note que  $Q_1 \neq \sigma$  para que as cargas  
sejam  $+Q$  e  $-Q$  respectivamente.  
Lei de Gauss

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} = E \cdot \underbrace{2\pi \rho L}_{\text{área da sup. Gaussiana}} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$Q = \sigma \cdot 2\pi R_a L \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cancel{2\pi R_a L} \cdot \frac{1}{\cancel{2\pi \rho L}} = \frac{\sigma R_a}{\epsilon_0 \rho}$$

A d.d.p. entre as superfícies de raios  $R_a$  e  $R_b$   
é dada por

$$V = V_+ - V_- = \int_+^- E \cdot dl = \frac{\sigma R_a}{\epsilon_0} \ln(\rho) \Big|_{R_a}^{R_b}$$

$$\Rightarrow V = \frac{\sigma R_a}{\epsilon_0} \ln\left(\frac{R_b}{R_a}\right)$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\sigma \cancel{2\pi R_a L}}{\frac{\sigma R_a}{\epsilon_0} \ln\left(\frac{R_b}{R_a}\right)} \epsilon_0 = \frac{2\pi \epsilon_0 L}{\ln\left(\frac{R_b}{R_a}\right)}$$

$R_b = R_a + d$  ————— distância entre as superfícies

Se  $d \ll R_a$   $\frac{R_b}{R_a} = \frac{R_a + d}{R_a} = 1 + \frac{d}{R_a}$

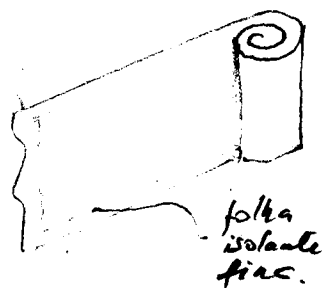
$\ln(1+x) \approx x$   $x \ll 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{R_b}{R_a}\right) \approx \frac{d}{R_a}$

Nome como  $C = \frac{2\pi\epsilon_0 L R_a}{d}$

$2\pi R_a L = \text{área da sup. lateral} \Rightarrow C \approx \frac{\epsilon_0 A}{d}$

folha metálica  
fina

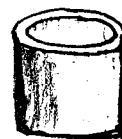
como em um capacitor  
de placas planas.



Superpondo uma folha metálica  
(condutora) com uma de um  
material isolante (dielétrico)

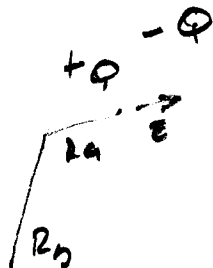
e enrolando, em seguida uma  
área lateral muito grande (de forma compacta, se  
a folha metálica e isolante forem suficientemente  
finas). Assim são feitos alguns capacitores  
comerciais

• • Funcionamento de Garrafa de Leiden



Capacitor esférico

Na região  $R_a < r < R_b$



$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$

$V = \Delta V = V_+ - V_- = \int_{R_a}^{R_b} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_a}^{R_b} \frac{1}{r^2} dr$

(8)

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_b} \right)$$

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 \left( \frac{R_a R_b}{R_b - R_a} \right)$$

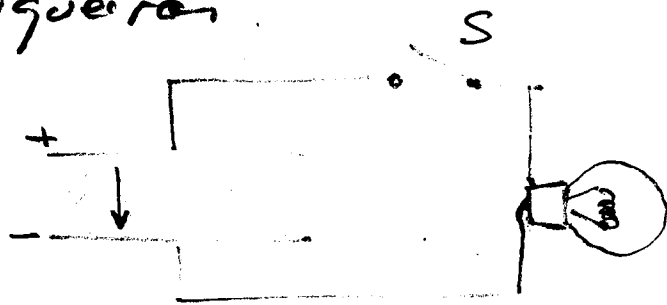
$$\lim_{R_b \rightarrow \infty} C = 4\pi\epsilon_0 R_a$$

Mesmo resultado  
obtido anteriormente

Mais uma vez, se  $R_b = R_a + d$  e  $d \ll R_a$

$$C \approx \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad \text{onde } A = 4\pi R_a^2$$

A capacidade de armazenar cargas elétricas  
nas placas de um capacitor e gerar corrente  
elétrica quando as placas são conectadas por um  
fil condutor tem aplicações tecnológicas  
corriqueiras.



Flash de máquina  
fotográfica por  
exemplo.

d.d.p. muito altas e correntes elétricas muito  
intensas podem ser armazenadas em capacitores.